Sorozatok

Nagy Noémi

Farkas Lóránt és Sáfár Orsolya munkája alapján

2022/2023 ősz

Valós számsorozatok

Egy valós számsorozat egy olyan $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény, amely a pozitív egész számokhoz rendel valós számokat. Jelölése a_n.

Valós számsorozatok

Egy valós számsorozat egy olyan $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény, amely a pozitív egész számokhoz rendel valós számokat. Jelölése a_n.

Például $(a_n) = (\frac{1}{n})$ az a sorozat melynek első tagja $a_1 = 1$, második tagja $a_2 = \frac{1}{2}$, harmadik tagja $a_3 = \frac{1}{3}$ $\ldots$. Vigyázzunk, az első pár tag nem adja meg egyértelműen a sorozatot, csakis a szabály!

Valós számsorozatok

Egy valós számsorozat egy olyan $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény, amely a pozitív egész számokhoz rendel valós számokat. Jelölése a_n.

Például $(a_n) = (\frac{1}{n})$ az a sorozat melynek első tagja $a_1 = 1$, második tagja $a_2 = \frac{1}{2}$, harmadik tagja $a_3 = \frac{1}{3}$ ... . Vigyázzunk, az első pár tag nem adja meg egyértelműen a sorozatot, csakis a szabály!

Például az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ sorozatot többféle módon is folytathattunk volna. Például lehetne a hozzárendelési szabályunk $a_n = 2^{n-1}$ ekkor $a_4 = 8$.

Valós számsorozatok

Egy valós számsorozat egy olyan $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény, amely a pozitív egész számokhoz rendel valós számokat. Jelölése a_n.

Például $(a_n) = (\frac{1}{n})$ az a sorozat melynek első tagja $a_1 = 1$, második tagja $a_2 = \frac{1}{2}$, harmadik tagja $a_3 = \frac{1}{3}$ ... . Vigyázzunk, az első pár tag nem adja meg egyértelműen a sorozatot, csakis a szabály!

Például az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ sorozatot többféle módon is folytathattunk volna. Például lehetne a hozzárendelési szabályunk $a_n = 2^{n-1}$ ekkor $a_4 = 8$.

De lehetne $a_n = \lceil \log_2(n) \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ekkor $a_4 = 4$.

Korlátosság

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat korlátos, ha találunk olyan K pozitív valós számot, amelyre teljesül, hogy $|a_n| \leq K$ az összes n indexre.

Korlátosság

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat korlátos, ha találunk olyan K pozitív valós számot, amelyre teljesül, hogy $|a_n| \leq K$ az összes n indexre.

Példa: $(a_n) = ((-1)^n)$. Ekkor a $K = 1$ jó választás, hiszen minden n esetén $|(-1)^n| = 1 \leq 1$.

Korlátosság

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat korlátos, ha találunk olyan K pozitív valós számot, amelyre teljesül, hogy $|a_n| \leq K$ az összes n indexre.

Példa: $(a_n) = ((-1)^n)$. Ekkor a $K = 1$ jó választás, hiszen minden n esetén $|(-1)^n| = 1 \leq 1$.

Példa 2: $(a_n) = (\sin(n))$. A $K = 1$ erre is jó választás, hiszen $|\sin(n)| \leq 1$, mert minden valós szám szinusza legfeljebb 1.

Korlátosság

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat korlátos, ha találunk olyan K pozitív valós számot, amelyre teljesül, hogy $|a_n| \leq K$ az összes n indexre.

Példa: $(a_n) = ((-1)^n)$. Ekkor a $K = 1$ jó választás, hiszen minden n esetén $|(-1)^n| = 1 \leq 1$.

Példa 2: $(a_n) = (\sin(n))$. A $K = 1$ erre is jó választás, hiszen $|\sin(n)| \leq 1$, mert minden valós szám szinusza legfeljebb 1.

Valójában nem csak egy korlát van. Ugyanis, ha K korlát, akkor minden nála nagyobb szám is jó korlátnak. Általában nem fontos megtalálni a legjobb korlátot. Például a fenti sorozatokra a $K = 2$ is jó korlát lenne.

Korlátosság II

Példa 3: $(a_n) = (n)$ nem korlátos, mert bármilyen valós számnál létezik nagyobb természetes szám (ezt az állítást Archimédeszi axiómának nevezik).

Korlátosság II

Példa 3: $(a_n) = (n)$ nem korlátos, mert bármilyen valós számnál létezik nagyobb természetes szám (ezt az állítást Archimédeszi axiómának nevezik).

Bizonyítás.

(Indirekt): ha lenne valamilyen K valós korlátja a sorozatnak, akkor legyen N egy olyan természetes szám, ami nagyobb K-nál ($N > K$). Ekkor az N-edik indexű tagja a sorozatnak $a_N = N$, ami nem kisebb a korlatnál. ■

Monotonitás

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat monoton nő, ha minden n indexre teljesül, hogy $a_{n+1} \geq a_n$. A sorozat szigorú monoton nő, ha $\geq$ helyett $>$ is igaz.

Monotonitás

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat monoton nő, ha minden n indexre teljesül, hogy $a_{n+1} \geq a_n$. A sorozat szigorú monoton nő, ha $\geq$ helyett $>$ is igaz.

Példa: Az $a_n = n$ sorozat monoton nő és szigorúan monoton is nő, hiszen $a_{n+1} = n + 1 > n = a_n$.

Monotonitás

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat monoton nő, ha minden n indexre teljesül, hogy $a_{n+1} \geq a_n$. A sorozat szigorú monoton nő, ha $\geq$ helyett $>$ is igaz.

Példa: Az $a_n = n$ sorozat monoton nő és szigorúan monoton is nő, hiszen $a_{n+1} = n + 1 > n = a_n$.

Példa 2: Az $b_n = \lceil \log_2(n) \rceil$ sorozat, melynek első néhány tagja $0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, \ldots$ monoton nő, de nem szigorúan monoton nő.

Monotonitás

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat monoton nő, ha minden n indexre teljesül, hogy $a_{n+1} \geq a_n$. A sorozat szigorú monoton nő, ha $\geq$ helyett $>$ is igaz.

Példa: Az $a_n = n$ sorozat monoton nő és szigorúan monoton is nő, hiszen $a_{n+1} = n + 1 > n = a_n$.

Példa 2: Az $b_n = \lceil \log_2(n) \rceil$ sorozat, melynek első néhány tagja $0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, \ldots$ monoton nő, de nem szigorúan monoton nő.

Példa 3: A konstans sorozat (amelynek minden egyes tagja ugyanaz a szám) monoton nő, de nem szigorúan monoton nő. Emellett ez a sorozat monoton csökken is.

Monotonitás

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat monoton nő, ha minden n indexre teljesül, hogy $a_{n+1} \geq a_n$. A sorozat szigorú monoton nő, ha $\geq$ helyett $>$ is igaz.

Példa: Az $a_n = n$ sorozat monoton nő és szigorúan monoton is nő, hiszen $a_{n+1} = n + 1 > n = a_n$.

Példa 2: Az $b_n = \lceil \log_2(n) \rceil$ sorozat, melynek első néhány tagja $0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, \ldots$ monoton nő, de nem szigorúan monoton nő.

Példa 3: A konstans sorozat (amelynek minden egyes tagja ugyanaz a szám) monoton nő, de nem szigorúan monoton nő. Emellett ez a sorozat monoton csökken is.

Hasonlóan definiálható a monoton csökkenő sorozat is. Ha valamilyen sorozatra az mondjuk, hogy monoton, akkor arra gondolunk, hogy vagy monoton nő, vagy monoton csökken.

Sorozat határértéke

Szeretnénk jellemezni a sorozat viselkedését nagy indexek esetén, erre szolgál a következő néhány definíció.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke $+\infty$, ha minden határon túl nő, vagyis bármilyen nagy pozitív P számhoz található olyan $N(P)$ küszöbszám, hogy a sorozat összes, $N(P)$ küszöbnél nagyobb indexű tagja a P számnál nagyobb. Jele: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Sorozat határértéke

Szeretnénk jellemezni a sorozat viselkedését nagy indexek esetén, erre szolgál a következő néhány definíció.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke $+\infty$, ha minden határon túl nő, vagyis bármilyen nagy pozitív P számhoz található olyan $N(P)$ küszöbszám, hogy a sorozat összes, $N(P)$ küszöbnél nagyobb indexű tagja a P számnál nagyobb. Jele: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Ugyanez a definíció kvantorokkal megfogalmazva:

Definíció

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke $+\infty$, ha $\forall P \in \mathbb{R}^+$-ra $\exists N(P) \in \mathbb{R}$, hogy $\forall n > N(P)$ esetén $a_n > P$ teljesül.

Sorozat határértéke

Szeretnénk jellemezni a sorozat viselkedését nagy indexek esetén, erre szolgál a következő néhány definíció.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az (a_n) *sorozat határértéke* $+\infty$*, ha minden határon túl nő, vagyis bármilyen nagy pozitív* P *számhoz található olyan* $N(P)$ *küszöbszám, hogy a sorozat összes,* $N(P)$ *küszöbnél nagyobb indexű tagja a* P *számnál nagyobb. Jele:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Ugyanez a definíció kvantorokkal megfogalmazva:

Definíció

Azt mondjuk, hogy az (a_n) *sorozat határértéke* $+\infty$*, ha* $\forall P \in \mathbb{R}^+$*-ra* $\exists N(P) \in \mathbb{R}$*, hogy* $\forall n > N(P)$ *esetén* $a_n > P$ *teljesül.*

Megjegyzés: Ha $N(P) \in \mathbb{R}$, akkor küszöbszámnak nevezzük. Megadható $N(P) \in \mathbb{N}$ is, ekkor $N(P)$-t küszöbindexnek hívjuk.

Példák plusz végtelenbe tartó sorozatokra

Példa: Az $a_n = n$ sorozat plusz végtelenbe tart, mert az

$$a_n = n > P$$

egyenlőtlenség teljesül minden $n > P$ indexre. Azaz $\forall P \in \mathbb{R}^+$-ra $N(P) = P$ küszöbszám mellett $\forall n > N(P)$ esetén $a_n = n > P$ teljesül.

Példák plusz végtelenbe tartó sorozatokra

Példa: Az $a_n = n$ sorozat plusz végtelenbe tart, mert az

$$a_n = n > P$$

egyenlőtlenség teljesül minden $n > P$ indexre. Azaz $\forall P \in \mathbb{R}^+$-ra $N(P) = P$ küszöbszám mellett $\forall n > N(P)$ esetén $a_n = n > P$ teljesül.

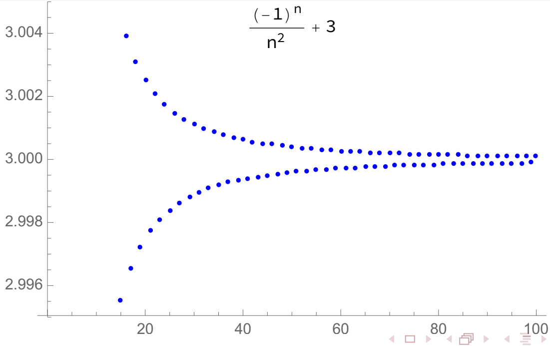
Példa 2: Az $b_n = \log_2(n)$ sorozat végtelenbe tart, mert minden $P > 0$-ra az $N(P) = 2^P$ jó küszöbszám, mivel ha $n > 2^P$, akkor

$$a_n = \log_2(n) > \log_2(2^P) = P.$$

Sorozat véges határértéke

Definíció

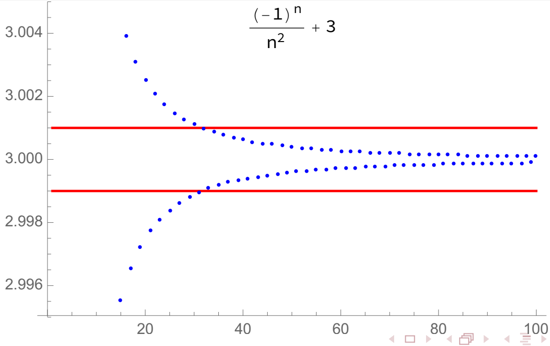
Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke a $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha bármilyen kicsi pozitív ε távolsághoz található olyan $N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy a sorozat összes, $N(\varepsilon)$ küszöbnél nagyobb indexű tagja az ε távolságnál közelebb esik A-hoz. Jele: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.



Sorozat véges határértéke

Definíció

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke a $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha bármilyen kicsi pozitív ε távolsághoz található olyan $N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy a sorozat összes, $N(\varepsilon)$ küszöbnél nagyobb indexű tagja az ε távolságnál közelebb esik A-hoz. Jele: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.



Precíz definició, Konvergencia

Ugyanez a definíció kvantorokkal és képletekkel megfogalmazva:

Definíció

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke a $A \in \mathbb{R}$ szám ha $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-ra $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy $\forall n > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ teljesül.

Precíz definició, Konvergencia

Ugyanez a definíció kvantorokkal és képletekkel megfogalmazva:

Definíció

Azt mondjuk, hogy az (a_n) *sorozat határértéke a* $A \in \mathbb{R}$ *szám ha* $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$*-ra* $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$*, hogy* $\forall n > N(\varepsilon)$ *esetén* $|a_n - A| < \varepsilon$ *teljesül.*

Azon sorozatokat, amelyeknek létezik véges határértéke konvergensnek nevezzük. Ha egy sorozat nem konvergens, akkor divergensnek hívjuk.

Precíz definició, Konvergencia

Ugyanez a definíció kvantorokkal és képletekkel megfogalmazva:

Definíció

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke a $A \in \mathbb{R}$ szám ha $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-ra $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy $\forall n > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ teljesül.

Azon sorozatokat, amelyeknek létezik véges határértéke konvergensnek nevezzük. Ha egy sorozat nem konvergens, akkor divergensnek hívjuk.

Példa: Legyen $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$. Bizonyítsuk be a definíció szerint, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$!

Példa konvergenciára

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy bármilyen kicsi $\varepsilon > 0$-ra, $|a_n - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$ kisebb lesz ε-nál, ha az n index elég nagy.

Példa konvergenciára

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy bármilyen kicsi $\varepsilon > 0$-ra, $|a_n - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$ kisebb lesz ε-nál, ha az n index elég nagy. Tehát kell, hogy

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

elég nagy n-re.

Példa konvergenciára

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy bármilyen kicsi $\varepsilon > 0$-ra, $|a_n - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$ kisebb lesz ε-nál, ha az n index elég nagy. Tehát kell, hogy

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

elég nagy n-re. Szorozzuk be mindkét oldalt $n > 0$-val és osszuk el $\varepsilon > 0$-val!

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

Példa konvergenciára

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy bármilyen kicsi $\varepsilon > 0$-ra, $|a_n - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$ kisebb lesz ε-nál, ha az n index elég nagy. Tehát kell, hogy

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

elég nagy n-re. Szorozzuk be mindkét oldalt $n > 0$-val és osszuk el $\varepsilon > 0$-val!

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

Vagyis, $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Így $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ jó küszöbszám lesz.

Példa 2

Legyen $b_n = \left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$. Bizonyítsuk be a definíció szerint, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$!

Példa 2

Legyen $b_n = \left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$. Bizonyítsuk be a definíció szerint, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$!

Most $|b_n - A| = \left|3 + \dfrac{1}{2^n} - 3\right| = \dfrac{1}{2^n}$-ről kell megmutatnunk, hogy minden ε-nál kisebb. Így azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

ha n elég nagy.

Példa 2

Legyen $b_n = \left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$. Bizonyítsuk be a definíció szerint, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$!

Most $|b_n - A| = \left|3 + \dfrac{1}{2^n} - 3\right| = \dfrac{1}{2^n}$-ről kell megmutatnunk, hogy minden ε-nál kisebb. Így azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

ha n elég nagy.

A fenti egyenletet átrendezve és logartmust véve kapjuk.

$$\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n$$

Példa 2

Legyen $b_n = \left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$. Bizonyítsuk be a definíció szerint, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 3$!

Most $|b_n - A| = \left|3 + \dfrac{1}{2^n} - 3\right| = \dfrac{1}{2^n}$-ről kell megmutatnunk, hogy minden ε-nál kisebb. Így azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

ha n elég nagy.

A fenti egyenletet átrendezve és logartmust véve kapjuk.

$$\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n$$

Tehát $N(\varepsilon) = \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ jó lesz.

Konvergencia és korlátosság kapcsolata

Tétel

Minden konvergens sorozat korlátos.

Konvergencia és korlátosság kapcsolata

Tétel

Minden konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás (vázlat).

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, akkor mondjuk $A+1$ fölé csak véges sok tag esik (hiszen az $N(1)$ küszöbindex után minden tag $[A-1, A+1]$-be esik). A véges sok tag és $A+1$ maximuma felső korlát. Hasonlóan bizonyítjuk az alsó korlátot is. $\blacksquare$

Konvergencia és korlátosság kapcsolata

Tétel

Minden konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás (vázlat).

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, akkor mondjuk $A+1$ fölé csak véges sok tag esik (hiszen az $N(1)$ küszöbindex után minden tag $[A-1, A+1]$-be esik). A véges sok tag és $A+1$ maximuma felső korlát. Hasonlóan bizonyítjuk az alsó korlátot is. ■

Az állítás megfordítása nem igaz, korlátos sorozatok nem feltétlen konvergensek, például a $(-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens.

Konvergencia és korlátosság kapcsolata

Tétel

Minden konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás (vázlat).

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, akkor mondjuk $A+1$ fölé csak véges sok tag esik (hiszen az $N(1)$ küszöbindex után minden tag $[A-1, A+1]$-be esik). A véges sok tag és $A+1$ maximuma felső korlát. Hasonlóan bizonyítjuk az alsó korlátot is. ■

Az állítás megfordítása nem igaz, korlátos sorozatok nem feltétlen konvergensek, például a $(-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens.

A két tulajdonság közötti kapcsolatot úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a korlátosság *szükséges, de nem elégséges feltétele* a konvergenciának.

Konvergencia és monotonitás kapcsolata

A monotonitás önmagában nem következik a konvergenciából, sem a monotonitásból a konvergencia.

Konvergencia és monotonitás kapcsolata

A monotonitás önmagában nem következik a konvergenciából, sem a monotonitásból a konvergencia.

Erre két példa:

- a $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ sorozat, amely nem monoton, de konvergens.
- Illetve az $b_n = n$ sorozat, amely monoton, viszont nem konvergens.

Konvergencia és monotonitás kapcsolata

A monotonitás önmagában nem következik a konvergenciából, sem a monotonitásból a konvergencia.

Erre két példa:

- a $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ sorozat, amely nem monoton, de konvergens.
- Illetve az $b_n = n$ sorozat, amely monoton, viszont nem konvergens.

Ugyanakkor:

Tétel

Ha sorozat korlátos és monoton akkor konvergens.

Konvergencia és monotonitás kapcsolata

A monotonitás önmagában nem következik a konvergenciából, sem a monotonitásból a konvergencia.

Erre két példa:

- a $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ sorozat, amely nem monoton, de konvergens.
- Illetve az $b_n = n$ sorozat, amely monoton, viszont nem konvergens.

Ugyanakkor:

Tétel

Ha sorozat korlátos és monoton akkor konvergens.

Az állítás nem megfordítható, mint láttuk nem minden konvergens sorozat monoton!

Műveletek sorozatokkal

Sorozatoknak értelmezhetjük lineáris kombinációját: ha adott az a_n és b_n sorozat, akkor értelmezhetjük a $c_1 \cdot a_n + c_2 \cdot b_n$ sorozatot ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

Műveletek sorozatokkal

Sorozatoknak értelmezhetjük lineáris kombinációját: ha adott az a_n és b_n sorozat, akkor értelmezhetjük a $c_1 \cdot a_n + c_2 \cdot b_n$ sorozatot ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

- A sorozat konstansszorosát úgy értelmezzük, hogy a $c \cdot a_n$ sorozat minden tagja az eredeti sorozat tagjainak c-szerese ($c \in \mathbb{R}$).
  Példa: Az n^2, azaz az $1, 4, 9, \ldots$ kezdetű sorozat kétszerese a $2n^2$ sorozat, azaz a $2, 8, 18, \ldots$ kezdetű sorozat.
- Két sorozat összegét úgy kapjuk, hogy vesszük a tagok összegét.
  Példa: Az n^2 és az n sorozat összege az $n^2 + n$ sorozat, azaz a $2, 6, 12, \ldots$ kezdetű sorozat.

Műveletek sorozatokkal

Sorozatoknak értelmezhetjük lineáris kombinációját: ha adott az a_n és b_n sorozat, akkor értelmezhetjük a $c_1 \cdot a_n + c_2 \cdot b_n$ sorozatot ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

- A sorozat konstansszorosát úgy értelmezzük, hogy a $c \cdot a_n$ sorozat minden tagja az eredeti sorozat tagjainak c-szerese ($c \in \mathbb{R}$).
  Példa: Az n^2, azaz az $1, 4, 9, \dots$ kezdetű sorozat kétszerese a $2n^2$ sorozat, azaz a $2, 8, 18, \dots$ kezdetű sorozat.
- Két sorozat összegét úgy kapjuk, hogy vesszük a tagok összegét.
  Példa: Az n^2 és az n sorozat összege az $n^2 + n$ sorozat, azaz a $2, 6, 12, \dots$ kezdetű sorozat.

Ehhez hasonlóan értelmezhetjük a sorozatok szorzatát és hányadosát. Hányadost csak akkor tudunk definiálni, ha azon sorozatnak, amellyel osztani szeretnék, egyik tagja sem 0.

Műveletek és korlátosság

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb definiált műveletek megőrzik-e a korlátosságot!

Műveletek és korlátosság

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb definiált műveletek megőrzik-e a korlátosságot!

Tétel

Két korlátos sorozat összege is korlátos.

Műveletek és korlátosság

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb definiált műveletek megőrzik-e a korlátosságot!

Tétel

Két korlátos sorozat összege is korlátos.

Bizonyítás.

Nevezzük az első sorozatot a_n-nek, a korlátját K_a-nak, a második sorozatot b_n-nek, az ő korlátját K_b-nek. Az állítás igazolásához tekintsük egy tetszőleges tagot az összegsorozatból! A

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq K_a + K_b$$

egyenlőtlenség mutatja, hogy az összeg is korlátos, mert a $K_a + K_b$ jó korlát lesz $(a_n + b_n)$-re. ■

Műveletek és korlátosság II

Az előbbi bizonyításhoz felhaszáltuk az úgynevezett *háromszög egyenlőtlenséget*:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Műveletek és korlátosság II

Az előbbi bizonyításhoz felhaszáltuk az úgynevezett *háromszög egyenlőtlenséget*:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Nyilván, ha a_n korlátja K akkor $c \cdot a_n$ korlátja $|c|K$.

Műveletek és korlátosság II

Az előbbi bizonyításhoz felhaszáltuk az úgynevezett *háromszög egyenlőtlenséget*:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Nyilván, ha a_n korlátja K akkor $c \cdot a_n$ korlátja $|c|K$.

Így bizonyítottuk, hogy korlátos sorozatok lineáris kombinációja is korlátos.

Műveletek és korlátosság II

Az előbbi bizonyításhoz felhaszáltuk az úgynevezett *háromszög egyenlőtlenséget*:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Nyilván, ha a_n korlátja K akkor $c \cdot a_n$ korlátja $|c|K$.

Így bizonyítottuk, hogy korlátos sorozatok lineáris kombinációja is korlátos.

Hasonlóképpen igazolható, hogy az $a_n \cdot b_n$ sorozat is korlátos marad.

Műveletek és korlátosság III

Sajnos a hányadosra viszont nem feltétlen teljesül a korlátosság.

Műveletek és korlátosság III

Sajnos a hányadosra viszont nem feltétlen teljesül a korlátosság.

Példa: $a_n = 1$ és $b_n = \frac{1}{n}$. Mindkét sorozat korlátos, méghozzá az 1 mindkettőnek korlátja. Viszont a hányadosra nem teljesül a korlátosság, hiszen:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n.$$

Műveletek és monotonitás

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb a sorozatokra definiált műveletek megőrzik-e a monotonitást!

Műveletek és monotonitás

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb a sorozatokra definiált műveletek megőrzik-e a monotonitást!

Tétel

Két monoton növő sorozat összege is monoton növő.

Műveletek és monotonitás

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb a sorozatokra definiált műveletek megőrzik-e a monotonitást!

Tétel

Két monoton növő sorozat összege is monoton növő.

Bizonyítás.

Nevezzük az első sorozatot a_n-nek, a második sorozatot b_n-nek. Az állítás igazolásához adjuk össze az $a_n \leq a_{n+1}$ és a $b_n \leq b_{n+1}$ egyenlőtlenségeket!A

$$a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1}$$

egyenlőtlenség mutatja, hogy az összegsorozat is monoton nő. ∎

Műveletek és monotonitás II

Ha egy monoton sorozatot konstanssal szorzunk, monoton marad, de ha negatív számmal szorozzuk, akkor növekvőből csökkenő, csökkenőből növekvő lesz.

Műveletek és monotonitás II

Ha egy monoton sorozatot konstanssal szorzunk, monoton marad, de ha negatív számmal szorozzuk, akkor növekvőből csökkenő, csökkenőből növekvő lesz.

Így monoton növekvő/csökkenő sorozatok különbsége nem biztos hogy monoton lesz.

Műveletek és monotonitás II

Ha egy monoton sorozatot konstanssal szorzunk, monoton marad, de ha negatív számmal szorozzuk, akkor növekvőből csökkenő, csökkenőből növekvő lesz.

Így monoton növekvő/csökkenő sorozatok különbsége nem biztos hogy monoton lesz.

- Példa: $n! - n^2$, aminek első pár tagja $0, -2, -3, 8, \ldots$, így nem monoton.

Műveletek és monotonitás II

Ha egy monoton sorozatot konstanssal szorzunk, monoton marad, de ha negatív számmal szorozzuk, akkor növekvőből csökkenő, csökkenőből növekvő lesz.

Így monoton növekvő/csökkenő sorozatok különbsége nem biztos hogy monoton lesz.

- Példa: $n! - n^2$, aminek első pár tagja $0, -2, -3, 8, \ldots$, így nem monoton.

  Meglepő módon a szorzás sem őrzi meg a monotonitást.

Műveletek és monotonitás II

Ha egy monoton sorozatot konstanssal szorzunk, monoton marad, de ha negatív számmal szorozzuk, akkor növekvőből csökkenő, csökkenőből növekvő lesz.

Így monoton növekvő/csökkenő sorozatok különbsége nem biztos hogy monoton lesz.

- Példa: $n! - n^2$, aminek első pár tagja $0, -2, -3, 8, \dots$, így nem monoton.

  Meglepő módon a szorzás sem őrzi meg a monotonitást.

  Példa 2: Legyen $a_n = n^2$, $b_n = \dfrac{-1}{n!}$. Mindkét sorozat szigorú monoton nő, a szorzatuk: $a_n \cdot b_n = -\frac{n^2}{n!} = -\frac{n}{(n-1)!}$, aminek első pár tagja $-1, -2, -\frac{3}{2}, \dots$, így nem monoton.

Műveletek és konvergencia

Tfh. a_n és b_n konvergens sorozatok és $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Ekkor:

- $c \cdot a_n$ is konvergens és $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot A$.

Műveletek és konvergencia

Tfh. a_n és b_n konvergens sorozatok és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Ekkor:

- $c \cdot a_n$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot A$.
- $a_n + b_n$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Műveletek és konvergencia

Tfh. a_n és b_n konvergens sorozatok és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Ekkor:

- $c \cdot a_n$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot A$.
- $a_n + b_n$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$.
- $a_n - b_n$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$.

Műveletek és konvergencia

Tfh. a_n és b_n konvergens sorozatok és $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Ekkor:

- $c \cdot a_n$ is konvergens és $\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot A$.
- $a_n + b_n$ is konvergens és $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$.
- $a_n - b_n$ is konvergens és $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$.
- $a_n b_n$ is konvergens és $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$.

Műveletek és konvergencia

Tfh. a_n és b_n konvergens sorozatok és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Ekkor:

- $c \cdot a_n$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot A$.
- $a_n + b_n$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.
- $a_n - b_n$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$.
- $a_n b_n$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$.
- Ha $b_n \neq 0$ semmilyen n-re és $B \neq 0$ akkor (a_n/b_n) is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$.

Műveletek és konvergencia II

Tfh. a_n konvergens sorozat és $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, ekkor:

Műveletek és konvergencia II

Tfh. a_n konvergens sorozat és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ekkor:

- Ha p tetszőleges pozitív egész konstans, akkor a_n^p is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = A^p$.
- Ha $a_n \geq 0$ minden n-re, q tetszőleges valós konstans és $A \neq 0$, akkor a_n^q is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^q = A^q$.

Műveletek és konvergencia II

Tfh. a_n konvergens sorozat és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ekkor:

- Ha p tetszőleges pozitív egész konstans, akkor a_n^p is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = A^p$.
- Ha $a_n \geq 0$ minden n-re, q tetszőleges valós konstans és $A \neq 0$, akkor a_n^q is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^q = A^q$.

Az viszont, hogy ha a_n és b_n is konvergensek, akkor ${a_n}^{b_n}$ határértéke A^B csak akkor igaz, ha $A \geq 0$ és B véges.

Műveletek és határérték

Tfh. a_n konvergens $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$ és b_n-re $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Ekkor:

- $a_n + b_n$ sorozatnak létezik határértéke és $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

Műveletek és határérték

Tfh. a_n konvergens $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$ és b_n-re $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Ekkor:

- $a_n + b_n$ sorozatnak létezik határértéke és $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.
- $a_n \cdot b_n$ sorozatnak létezik határértéke és $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$.

Műveletek és határérték

Tfh. a_n konvergens $\lim_{n\to\infty} a_n = A > 0$ és b_n-re $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Ekkor:

- $a_n + b_n$ sorozatnak létezik határértéke és $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.
- $a_n \cdot b_n$ sorozatnak létezik határértéke és $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$.
- Ha $b_n \neq 0$ semmilyen n-re és $A \in \mathbb{R}$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$.

Műveletek és határérték

Tfh. a_n konvergens $\lim_{n\to\infty} a_n = A > 0$ és b_n-re $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Ekkor:

- $a_n + b_n$ sorozatnak létezik határértéke és $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.
- $a_n \cdot b_n$ sorozatnak létezik határértéke és $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$.
- Ha $b_n \neq 0$ semmilyen n-re és $A \in \mathbb{R}$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$.

Ha $\lim_{n\to\infty} c_n = C < 0$ akkor

- $b_n c_n$-nek létezik határértéke és $\lim_{n\to\infty}(b_n c_n) = -\infty$

Azt mondjuk, hogy x_n határértéke mínusz végtelen, ha $-x_n$ határértéke plusz végtelen.

Műveletek végtelenhez tartó sorozatokkal

Tfh. a_n, b_n és c_n olyan sorozatok, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$. Ekkor:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - c_n) = +\infty$.

Műveletek végtelenhez tartó sorozatokkal

Tfh. a_n, b_n és c_n olyan sorozatok, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$. Ekkor:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - c_n) = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty$.

Műveletek végtelenhez tartó sorozatokkal

Tfh. a_n, b_n és c_n olyan sorozatok, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$. Ekkor:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = +\infty$.
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$.
- $\lim_{n\to\infty}(a_n c_n) = -\infty$, $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = -\infty$.

Műveletek végtelenhez tartó sorozatokkal

Tfh. a_n, b_n és c_n olyan sorozatok, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$. Ekkor:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - c_n) = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n c_n) = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n - a_n) = -\infty$.
- Ha $a_n \geq 0$ minden n-re akkor és q tetszőleges pozitív valós konstans, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^q = +\infty$.

Kritikus esetek: ∞/∞

Tfh. (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.
Ekkor (a_n/b_n) határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty,$$

Kritikus esetek: ∞/∞

Tfh. (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Ekkor (a_n/b_n) határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0,$$

Kritikus esetek: ∞/∞

Tfh. (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.
Ekkor (a_n/b_n) határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Kritikus esetek: ∞/∞

Tfh. (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Ekkor (a_n/b_n) határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Ezen határértékek igazolása úgy történik, hogy a számlálóban és a nevezőben lévő legyorsabban növő tagokat kiemeljük, egyszerűsítünk és alkalmazzuk az eddig tanultakat.

Kritikus esetek: $\infty \cdot 0$

Tfh. (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Ekkor $(a_n b_n)$ határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1}{n+1} = \infty,$$

Kritikus esetek: $\infty \cdot 0$

Tfh. (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Ekkor $(a_n b_n)$ határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1}{n+1} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)\frac{1}{n^2} = 0,$$

Kritikus esetek: $\infty \cdot 0$

Tfh. (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Ekkor $(a_n b_n)$ határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1}{n+1} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)\frac{1}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)\frac{1}{n} = 1.$$